

Estudo comparativo entre diferentes métodos de aglutinação em otimização com múltiplas respostas

Comparative study between different methods of agglutination in multiple response optimization

Fabício Maciel Gomes¹ - Escola de Engenharia de Lorena - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
Félix Monteiro Pereira² - Escola de Engenharia de Lorena - Departamento de Engenharia Química
Fernando Augusto Silva Marins³ - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - Departamento de Produção
Messias Borges Silva⁴ - Escola de Engenharia de Lorena - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de avaliar o desempenho das funções aglutinadoras Desirability, Desirability Modificada e Programação por Compromisso, aplicadas na otimização de problemas com múltiplas respostas. O desempenho das funções aglutinadoras foi mensurado por meio da Distância Percentual Média. Para a aplicação do método proposto foram selecionados três problemas contendo múltiplas respostas presentes na literatura. Os resultados obtidos para os casos de estudo selecionados indicam um melhor desempenho da função aglutinadora Desirability Modificada, para a otimização simultânea de múltiplas respostas, especialmente quando essas respostas são modeladas por equações contendo termos quadráticos, independentemente do número de termos, do tipo de respostas e do número de variáveis que possam conter. A metodologia e os resultados apresentados neste trabalho visam colaborar com a pesquisa, o desenvolvimento e a avaliação de técnicas avançadas para a otimização de problemas com múltiplas respostas que são relevantes na busca de especificações para o aumento da eficiência em processos industriais.

Palavras-chave: Desirability, otimização, múltiplas respostas.

ABSTRACT

This work aims to evaluate the performance of the agglutination functions Desirability, Modified Desirability and Commitment Programming, applied in the optimization of problems with multiple response. The performance of the agglutinating functions was measured through the Average Percentage of Deviation. In order to apply the proposed method, three problems containing multiple responses were selected in the literature. The results obtained for the selected case studies indicate a better performance of the modified Desirability agglutination function for the simultaneous optimization of multiple responses, especially when these responses are modeled by equations containing quadratic terms, regardless of the number of terms, type of responses and Number of variables they may contain. The methodology and results presented in this study aim to collaborate with the research, development and evaluation of advanced techniques for the optimization of problems with multiple responses that are relevant in the search for specifications to increase efficiency in industrial processes.

Keywords: Desirability, optimization, multiple response.

1. Estrada Municipal do Campinho, S/N, Campinho, CEP: 12602-810, Lorena, SP, fmgomes@usp.br; 2. felixmpereira@usp.br; 3. fmarins@feg.unesp.br; 4. messias@dequi.eel.usp.br

GOMES, F. M.; PEREIRA, F. M.; MARINS, F. A. S.; SILVA, M. B. Estudo comparativo entre diferentes métodos de aglutinação em otimização com múltiplas respostas. **GEPROS. Gestão da Produção, Operações e Sistemas**, Bauru, Ano 15, nº 1, jan-mar/2019, p. 95-113.

DOI: 10.15675/gepros.v14i1.2080

1. INTRODUÇÃO

A determinação de uma melhoria de processo é tipicamente complexa em função das variações de demanda dos clientes e dos avanços tecnológicos. Geralmente, deve-se levar em consideração várias respostas para que se alcance uma melhoria global no processo (TSAI, et al., 2010).

É importante ressaltar que um processo de otimização não implica necessariamente na determinação das condições ótimas de operação, uma vez que fica praticamente impossível estabelecer o ponto ótimo em função da grande quantidade de variáveis que impactam em um processo. Ao invés disso, o que se pode determinar são condições de melhorias a partir da seleção de pontos máximos determinados dentro de um espaço de busca pré-determinado. (DEHURI; CHO, 2009).

Segundo Boylan et al. (2013), a otimização simultânea de múltiplas respostas tem sido prioridade em vários ramos industriais, e grande parte dos esforços tem sido direcionada a pesquisa de métodos alternativos para a determinação eficiente e um ajuste de processo que atinja a uma determinada meta.

Problemas de otimização com múltiplas respostas geralmente envolvem objetivos conflitantes dificultando sua resolução (KURIGER; GRANT, 2011), por exemplo, a minimização do tempo de produção versus a minimização do custo do equipamento de fabricação em processos fabris ou a maximização da produção de biomassa versus a minimização do consumo de substrato em processos biotecnológicos.

De acordo com Ehr Gott et al. (2014), há ainda uma lacuna entre a teoria e a prática na otimização com múltiplas respostas, sendo evidente o fato de que os métodos de otimização ainda não são usados para muitos problemas do mundo real para os quais eles poderiam causar impacto. Tal fato ocorre porque a maioria dos problemas do mundo real são problemas com múltiplas respostas, e os dados de entrada muitas vezes não são conhecidos de antemão.

Atualmente o método de otimização de processos mais utilizado em trabalhos científicos é o emprego conjunto do método de aglutinação *Desirability* com o método matemático de busca do Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) (ELSAYED; LACOR, 2013). Uma explicação viável para este fato é desta combinação estar presente na função *Optimizer do software Minitab*[®], que facilitaria a execução deste método.

Entretanto, há uma grande variedade de métodos de aglutinação (GOMES, 2015), fazendo-se necessário um estudo comparativo entre tais métodos para a determinação da eficiência individual dos mesmos.

Assim este trabalho objetivou a comparação de diferentes métodos de aglutinação aplicados na otimização de processos com múltiplas respostas.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Segundo Gomes (2015), a otimização de processos contendo múltiplas respostas pode ser dividida em três etapas:

- Modelagem matemática do processo;
- Emprego de um método de aglutinação;
- Utilização de um método matemático de busca pelo melhor ajuste de processo.

2.1. Modelagem matemática do processo

Para a modelagem de processos com múltiplas respostas é comum a utilização da técnica da experimentação por meio do Planejamento de Experimentos (*Design of Experiments* – DOE).

Segundo Haridy et al. (2011), o DOE é um método estruturado e organizado, utilizado na determinação do relacionamento de diferentes fatores de entrada e saída do processo, envolvendo a definição do conjunto de experimentos, nos quais todos os fatores relevantes são variados sistematicamente. Por meio da análise dos resultados obtidos pode-se determinar o grau de influência na variável resposta de cada fator utilizado, assim como as interações entre os fatores e as condições ótimas.

Em processos com múltiplas respostas deve-se modelar cada uma das respostas que se pretende otimizar por uma função que descreva a denominada Superfície de Resposta, ou seja, que permita estimar o valor da resposta dentro do intervalo de variação definido para as variáveis envolvidas no estudo. Essas funções (equações de regressão múltipla) são normalmente obtidas da análise do resultado das experiências desenhadas pelo modelo de Box-Behnken, Compósito Central ou de desenhos fatoriais a três níveis, sendo em geral equações de segunda ordem. Wu & Hamada (2000) caracterizam estes modelos e afirmam que o modelo Compósito Central (*Composite Central Design* – CCD) é o mais utilizado.

2.2. Aglutinação de respostas

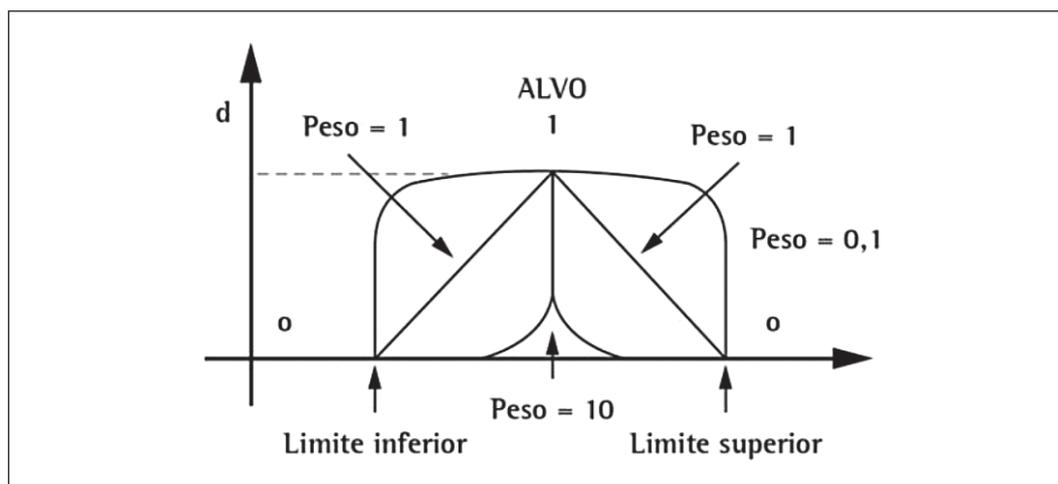
2.2.1. O Método Desirability

Uma das técnicas mais utilizadas para otimizar simultaneamente várias respostas consiste em transformar as equações que modelam cada uma dessas respostas em funções utilidade individuais, e depois proceder à otimização de uma função utilidade global, conhecido com *Total Desirability* (D), que é descrita em termos das funções utilidade individuais. A otimização simultânea de várias respostas transforma-se assim na otimização de uma única função. Os grandes impulsionadores desta abordagem foram Derringer e Suich (1980), que continua a ser uma base de comparação para outros métodos em termos dos resultados que permite obter. Além disso a sua fácil interpretação e implementação motivaram que o método fosse descrito e o seu desempenho reavaliado neste artigo.

Derringer e Suich (1980) apresentam funções utilidade individuais para respostas do tipo Nominal é Melhor (NTB – *Nominal-The-Best*), Maior é Melhor (LTB – *Larger-The-Better*) e Menor é Melhor (STB – *Smaller-The-Better*).

Quando o valor alvo (T) de uma resposta ($\hat{y}(x)$) está entre um valor máximo (U) e um valor mínimo (L), como mostrado na Figura 1, diz-se que a resposta é do tipo NTB com a correspondente função utilidade $d(\hat{y}(x))$, que por uma questão de simplificação será aqui representada por d , podendo ser definida como em (1):

Figura 1 - Função *Desirability* Normalizar.



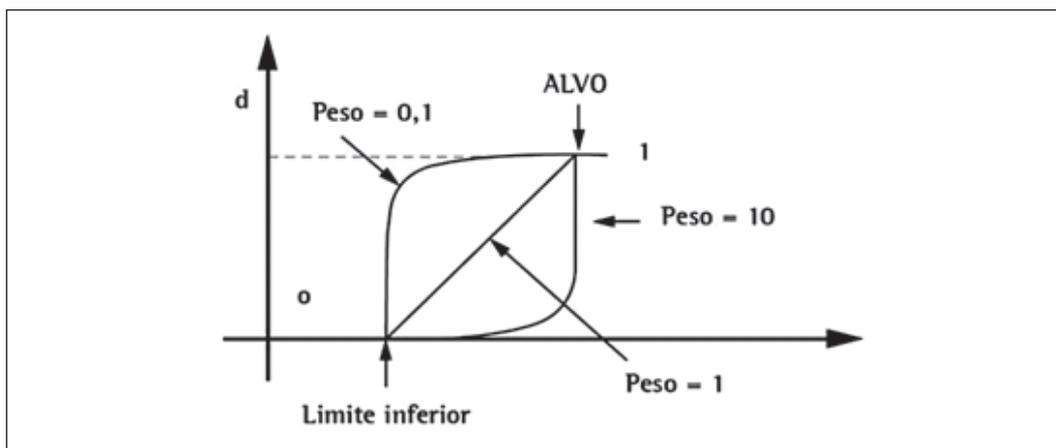
Fonte: Pimenta et al. (2015).

$$d = \begin{cases} \left[\frac{\hat{y} - L}{T - L} \right]^S & L \leq \hat{y} \leq T \\ \left[\frac{\hat{y} - U}{T - U} \right]^R & T \leq \hat{y} \leq U \\ 0 & \hat{y} < L \text{ ou } \hat{y} > U \end{cases} \quad (1)$$

Onde R e S são fatores de ponderação, que podem assumir valores maiores que 1 quando se deseja priorizar a maximização ou a minimização da resposta.

Quando o valor alvo T deve atingir o valor máximo da função, a resposta diz-se do tipo LTB, conforme ilustrado na Figura 2, e a correspondente função utilidade d pode ser definida como em (2):

Figura 2 - Função *Desirability* Maximizar.

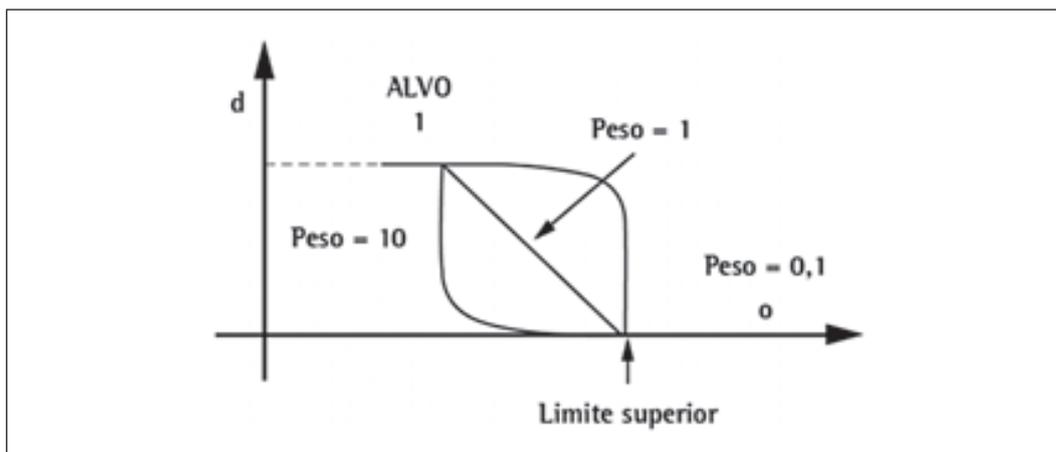


Fonte: Pimenta et al. (2015).

$$d = \begin{cases} 0 & \hat{y} < L \\ \left[\frac{\hat{y} - L}{U - L} \right]^R & L \leq \hat{y} \leq T \\ 1 & \hat{y} > U \end{cases} \quad (2)$$

Quando o valor alvo deve atingir o valor mínimo da função, conforme a Figura 3, a resposta diz-se do tipo STB com a correspondente função utilidade d sendo definida como em (3):

Figura 3 - Função *Desirability* Minimizar.



Fonte: Pimenta et al. (2015).

$$d = \begin{cases} 0 & \hat{y} > U \\ \left[\frac{\hat{y} - U}{L - U} \right]^R & L \leq \hat{y} \leq U \\ 1 & \hat{y} < L \end{cases} \quad (3)$$

De acordo com Derringer e Suich (1980), a otimização das respostas envolvidas no estudo pode ser efetuada por meio da maximização da função utilidade global dada por (4):

$$D = (d_1 \times d_2 \times d_3 \times \dots \times d_p)^{1/p} \quad (4)$$

onde p corresponde ao número de respostas a serem otimizadas.

De acordo com Derringer (1994) pode-se utilizar (5) ao invés de (4) na determinação do valor da função utilidade global, com a possibilidade de atribuir-se pesos de importância para cada função utilidade:

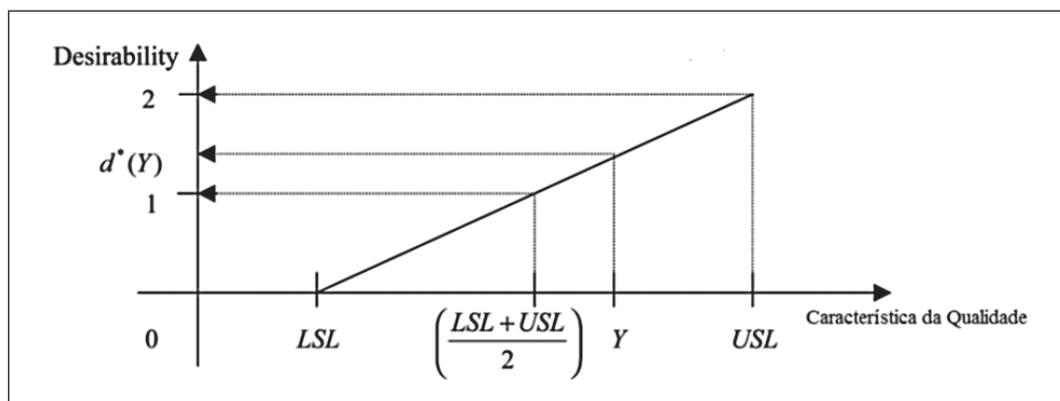
$$D = (d_1^{w_1} \times d_2^{w_2} \times d_3^{w_3} \times \dots \times d_p^{w_p})^{1/\sum_{i=1}^p w_i} \quad (5)$$

Entretanto, segundo Castillo e Montgomery (1993), afirmam que basta que uma das funções d tenha um valor inaceitável, por exemplo o valor mínimo ($d = 0$), para que a solução global também se torne inaceitável ($D = 0$).

2.2.2. O Método Desirability modificado

Ch'ng et al. (2005) propõem que a função utilidade global, definida por Derringer e Suich (1980) seja modificada na forma de uma média aritmética, para evitar que o método de busca apresente falsos valores ótimos. As modificações propostas podem ser observadas na Figura 4.

Figura 4 - Função *Desirability* Modificada.



Fonte: Adaptada de Ch'ng et al. (2005).

Pode-se observar na Figura 4 que o valor das funções utilidade individuais variam em um intervalo entre 1 e 2, sendo impossível obterem um valor nulo que comprometeria os resultados obtidos na função utilidade global. As funções utilidade individuais podem ser determinadas como em (6).

$$d_i = \frac{2 \cdot \hat{y}_i - (U + L)}{U - L} + 1 = \frac{2 \cdot \hat{y}_i}{U - L} + \frac{-2 \cdot L}{U - L} = m \cdot \hat{y}_i + c \quad (6)$$

com $0 \leq d_i \leq 2$.

A função utilidade global pode ser calculada como em (7):

$$\text{Total Desirability} = \frac{\sum_{i=1}^p e_i \cdot |d_i^*(Y_i) - d_i^*(T_i)|}{p} \quad (7)$$

onde: $d_i^*(Y_i)$ corresponde ao valor obtido pela função utilidade individual para a resposta i , $d_i^*(T_i)$ é o valor alvo da função utilidade individual, p é o número total de respostas aglutinadas pela função, e_i é o peso atribuído a resposta i ($\sum_{i=1}^p e_i = 1$).

Outro fator importante na modificação proposta por Ch'ng et al. (2005) é que não há necessidade de se fazer um ajuste polinomial nas funções utilidade individuais pois não há ponto de interrupção caso o valor obtido da resposta se encontre acima ou abaixo do valor alvo.

2.2.3. Programação por compromisso

A Programação por Compromisso (*Compromise Programming - CP*), foi apresentada inicialmente por Zeleny (1974), sendo posteriormente adaptado e aplicado na área dos recursos hídricos por Duckstein e Opricovic (1980), numa abordagem multiobjetivo na presença de variáveis discretas.

O método classifica as alternativas não dominadas utilizando um conceito geométrico do melhor baseando-se em uma medida de distância até a solução ideal. Segundo Cheng et al. (2013), esse método é caracterizado pela tentativa de identificar quais as soluções podem estar mais próximas de uma solução “ideal”, considerando essa medida como sendo a distância entre uma dada solução com relação à solução ideal.

A formulação de um modelo de CP pode ser expressa como em (8):

$$\text{Min } L_i = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i |T_i - \hat{y}_i|^s \right\}^{1/s} \quad (8)$$

onde: T_i é o valor alvo (*target*), s é um indicador da importância do desvio da resposta \hat{y}_i em relação ao seu valor alvo T_i , com $1 \leq s \leq \infty$, α_i são pesos positivos atribuídos a cada resposta de maneira individual, cujo somatório deve ser igual a 100%.

2.2.4. Distância Percentual Média

A Distância Percentual Média (DPM), apesar de ser considerado um método de aglutinação de respostas, é um método mais indicado como medida de comparação entre os resultados obtidos por outros métodos de aglutinação (XU et al., 2004).

A função DPM está descrita em (9):

$$DPM = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{|T_i - \hat{y}_i|}{T_i}}{n} \cdot 100 \quad (9)$$

No cálculo envolvendo respostas do tipo LTB e NTB, deve-se considerar o DPM igual a zero, caso o valor do alvo seja ultrapassado.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1. Objeto de estudo

De maneira a responder à questão da pesquisa, a comparação entre os métodos de aglutinação *Desirability*, *Desirability* modificado e a CP, procedeu-se sua aplicação em conjunto com o método matemático de busca, GRG, em três problemas-teste.

3.1.1. Derringer e Suich

Este problema consiste na otimização de quatro índices de qualidade da banda de rodagem de pneus: \hat{y}_1 - índice de abrasão, \hat{y}_2 - módulo 200%; \hat{y}_3 - alongamento de ruptura; \hat{y}_4 - dureza, e três variáveis de decisão: x_1 - nível de sílica hidratada, x_2 - nível de silano como agente ligante e x_3 - concentração de enxofre. As equações que modelam cada resposta são apresentadas em 10-13.

$$\hat{y}_1 = 139,12 + 16,49 \cdot x_1 + 17,88 \cdot x_2 + 10,91 \cdot x_3 - 4,01 \cdot x_1^2 - 3,45 \cdot x_2^2 - 1,57 \cdot x_3^2 + 5,13 \cdot x_1 \cdot x_2 + 7,13 \cdot x_1 \cdot x_3 + 7,88 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad (10)$$

$$\hat{y}_2 = 1261,11 + 268,15x_1 + 246,50x_2 + 139,48x_3 - 83,55x_1^2 - 124,79x_2^2 + 199,17x_3^2 + 69,38x_1x_2 + 94,13x_1x_3 + 104,38x_2x_3 \quad (11)$$

$$\hat{y}_3 = 400,38 - 99,67x_1 - 31,40x_2 - 73,92x_3 + 7,93x_1^2 + 17,31x_2^2 + 0,43x_3^2 + 8,75x_1x_2 + 6,25x_1x_3 + 1,25x_2x_3 \quad (12)$$

$$\hat{y}_4 = 68,91 - 1,41x_1 + 4,32x_2 + 1,63x_3 + 1,56x_1^2 + 0,06x_2^2 - 0,32x_3^2 - 1,63x_1x_2 + 0,13x_1x_3 - 0,25x_2x_3 \quad (13)$$

Os alvos para a otimização de cada resposta são apresentados em 14-17:

$$T_1 = 170 \quad (14)$$

$$T_2 = 1300 \quad (15)$$

$$T_3 = 500 \quad (16)$$

$$T_4 = 67,5 \quad (17)$$

As restrições para este problema estão descritas em 18-24:

$$-1,633 \leq x_1 \leq 1,633 \quad (18)$$

$$-1,633 \leq x_2 \leq 1,633 \quad (19)$$

$$-1,633 \leq x_3 \leq 1,633 \quad (20)$$

$$\hat{y}_1 \geq 120 \quad (21)$$

$$\hat{y}_2 \geq 1000 \quad (22)$$

$$400 \leq \hat{y}_3 \leq 600 \quad (23)$$

$$60 \leq \hat{y}_4 \leq 75 \quad (24)$$

A função objetivo para este caso, utilizando a função *Desirability* como função aglutinadora é definida em (25)

$$D = \left[\left(\frac{\hat{y}_1 - 120}{170 - 120} \right) * \left(\frac{\hat{y}_2 - 1000}{1300 - 1000} \right) * \left(\frac{\hat{y}_3 - 600}{500 - 600} \right) * \left(\frac{\hat{y}_4 - 75}{67,5 - 75} \right) \right]^{1/4} \quad (25)$$

Deve-se ressaltar que a função objetivo descrita em (25) pode sofrer ajustes em função dos valores obtidos nas respostas individuais 3 e 4, por se tratarem de objetivos de normalização.

A função objetivo para este teste, utilizando a função *Desirability* Modificada como função aglutinadora é definida em (26).

$$D_a = \frac{\left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_1 - 290}{50} \right) - 1 \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_2 - 2300}{300} \right) - 1 \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_3 - 1000}{200} \right) \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_4 - 135}{15} \right) \right|}{4} \quad (26)$$

A função objetivo para este teste, utilizando a função CP como função aglutinadora é definida em (27).

$$CP = \sqrt{0,25 \cdot \left[(170 - \hat{y}_1)^2 + (1300 - \hat{y}_2)^2 + (500 - \hat{y}_3)^2 + (67,5 - \hat{y}_4)^2 \right]} \quad (27)$$

3.1.2. Khuri e Conlon

O caso abordado por Khuri e Conlon (1981) investiga a otimização de quatro respostas que impactam nas características de textura e retenção de água em géis de concentrado de proteínas de soro de leite dialisado: \hat{y}_1 - dureza, \hat{y}_2 - coesividade; \hat{y}_3 - elasticidade; \hat{y}_4 - compressão à água, e duas variáveis de decisão: x_1 - nível de cisteína e x_2 - nível de clorato de cálcio. As equações que modelam cada resposta são apresentadas em (28-31).

$$\hat{y}_1 = 1,526 - 0,575x_1 - 0,524x_2 - 0,171x_1^2 - 0,098x_2^2 + 0,318x_1x_2 \quad (28)$$

$$\hat{y}_2 = 0,660 - 0,092x_1 - 0,010x_2 - 0,096x_1^2 - 0,058x_2^2 - 0,070x_1x_2 \quad (29)$$

$$\hat{y}_3 = 1,776 - 0,250x_1 - 0,078x_2 - 0,156x_1^2 - 0,079x_2^2 - 0,010x_1x_2 \quad (30)$$

$$\hat{y}_4 = 0,468 + 0,131x_1 + 0,073x_2 + 0,026x_1^2 + 0,024x_2^2 - 0,083x_1x_2 \quad (31)$$

Os alvos para a otimização de cada resposta foram determinados pelos autores do trabalho no qual se baseia este estudo de caso, e são apresentados em (32-35):

$$T_1 = 2,68 \quad (32)$$

$$T_2 = 0,69 \quad (33)$$

$$T_3 = 1,90 \quad (34)$$

$$T_4 = 0,71 \quad (35)$$

As restrições para este problema estão descritas em (36-41):

$$-1,414 \leq x_1 \leq 1,414 \quad (36)$$

$$-1,414 \leq x_2 \leq 1,414 \quad (37)$$

$$\hat{y}_1 \geq 0,37 \quad (38)$$

$$\hat{y}_2 \geq 0,30 \quad (39)$$

$$\hat{y}_3 \geq 1,10 \quad (40)$$

$$\hat{y}_4 \geq 0,23 \quad (41)$$

A função objetivo para este caso, utilizando o método *Desirability* como função aglutinadora é definida em (42)

$$D = \left[\left(\frac{\hat{y}_1 - 0,37}{2,68 - 0,37} \right) * \left(\frac{\hat{y}_2 - 0,3}{0,69 - 0,3} \right) * \left(\frac{\hat{y}_3 - 1,1}{1,9 - 1,1} \right) * \left(\frac{\hat{y}_4 - 0,23}{0,71 - 0,23} \right) \right]^{1/4} \quad (42)$$

No caso da função objetivo descrita em (42), não há necessidade de ajustes polinomiais por se tratar apenas de respostas do tipo LTB.

A função objetivo para este teste, utilizando o método *Desirability* Modificada como função aglutinadora é definida em (43).

$$D_a = \frac{\left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_1 - 3,05}{2,31} \right) - 1 \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_2 - 0,99}{0,39} \right) - 1 \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_3 - 3}{0,8} \right) - 1 \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_4 - 0,94}{0,48} \right) - 1 \right|}{4} \quad (43)$$

A função objetivo para este teste, utilizando a função CP como função aglutinadora é definida em (44).

$$CP = \sqrt{0,25 \cdot \left[(2,68 - \hat{y}_1)^2 + (0,69 - \hat{y}_2)^2 + (1,90 - \hat{y}_3)^2 + (0,71 - \hat{y}_4)^2 \right]} \quad (44)$$

3.1.3. Vining

No caso pesquisado por Vining (1998), o objetivo era a otimização de duas respostas distintas em um processo de polimerização: \hat{y}_1 - taxa de conversão, \hat{y}_2 - atividade térmica, e três variáveis de decisão: x_1 - tempo de reação, x_2 - temperatura de reação e x_3 - quantidade de catalisador. As equações que modelam cada resposta são apresentadas em (45-46).

$$\hat{y}_1 = 81,09 + 1,03x_1 + 4,04x_2 + 6,20x_3 - 1,83x_1^2 + 2,94x_2^2 - 5,19x_3^2 + 2,13x_1x_2 + 11,37x_1x_3 - 3,87x_2x_3 \quad (45)$$

$$\hat{y}_2 = 60,23 + 4,26x_1 + 2,23x_3 \quad (46)$$

Os alvos para a otimização de cada resposta foram determinados pelo autor do trabalho no qual se baseia este estudo de caso, e são apresentados em (47-48):

$$T_1 = 100 \quad (47)$$

$$T_2 = 57,5 \quad (48)$$

As restrições para este problema estão descritas em (49-53):

$$-1,633 \leq x_1 \leq 1,633 \quad (49)$$

$$-1,633 \leq x_2 \leq 1,633 \quad (50)$$

$$-1,633 \leq x_3 \leq 1,633 \quad (51)$$

$$\hat{y}_1 \geq 80 \quad (52)$$

$$55 \leq \hat{y}_2 \leq 60 \quad (53)$$

A função objetivo para este teste, utilizando o método *Desirability* como função aglutinadora é definida em (54).

$$D = \left[\left(\frac{\hat{y}_1 - 80}{100 - 80} \right) * \left(\frac{\hat{y}_2 - 55}{60 - 55} \right) \right]^{1/2} \quad (54)$$

Deve-se ressaltar que a função objetivo descrita em 55 pode sofrer ajustes em função do valor obtido na resposta individual 2, por se tratar de objetivo de normalização.

A função objetivo para este teste, utilizando o método *Desirability* Modificada como função aglutinadora é definida em (55).

$$D_a = \frac{\left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_1 - 180}{20} \right) - 1 \right| + \left| \left(\frac{2 \cdot \hat{y}_2 - 115}{5} \right) \right|}{2} \quad (55)$$

A função objetivo para este teste, utilizando a função CP como função aglutinadora é definida em (56).

$$CP = \sqrt{0,5 \cdot \left[(100 - \hat{y}_1)^2 + (57,5 - \hat{y}_2)^2 \right]} \quad (56)$$

3.2. Procedimentos de análise de dados

Para se efetuar a análise de desempenho de cada função aglutinadora nos testes propostos nesta pesquisa, utilizou-se a função DPM descrita em (9). Nos casos de respostas do tipo LTB e STB, os valores das distâncias individuais foram considerados como zero quando essas respostas ultrapassaram o alvo (T) estipulado.

Em todos os testes realizados, o método matemático de busca foi o Gradiente Reduzido Generalizado (GRG), que se encontra disponível na função *solver* do Microsoft Excel® v. 2016.

4. RESULTADOS

Os resultados obtidos para cada problema-teste são apresentados como segue.

4.1. Derringer e Suich

Os resultados obtidos a partir dos dados contidos no trabalho de Derringer e Suich (1980), encontram-se sumarizados na Tabela 1.

Como pode ser observado na Tabela 1, a função aglutinadora *Desirability* modificada apresentou uma eficiência superior às demais funções aglutinadoras utilizadas neste estudo, quando comparados os valores obtidos para a DPM.

Tabela 1 – Resultados do processo de otimização com diferentes funções aglutinadoras para o problema de Derringer e Suich.

Variáveis	Função Aglutinadora		
	<i>Desirability</i>	<i>Desirability</i> Modificada	CP
x_1	-0,060	-0,224	-0,280
x_2	0,157	0,077	0,714
x_3	-0,871	-1,048	-1,044
\hat{y}_1	129,400	124,369	127,284
\hat{y}_2	1300,000	1300,038	1299,320
\hat{y}_3	466,624	500,000	492,088
\hat{y}_4	68,063	67,500	70,798
DPM	7,85	6,71	7,91

Fonte: Elaborado pelos autores.

Nota-se também que o ajuste de processo obtido por cada função aglutinadora também é diferente, isto sugere que o método matemático de busca empregado (GRG) pode ter seu desempenho afetado pela forma com a qual se aglutinam as respostas.

4.2. Khuri e Conlon

Os resultados obtidos a partir dos dados contidos no trabalho de Khuri e Conlon (1981), encontram-se sumarizados na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados do processo de otimização com diferentes funções aglutinadoras para o problema de Khuri e Conlon.

Variáveis	Função Aglutinadora		
	Desirability	Desirability Modificada	CP
x_1	-0,356	-0,529	-0,593
x_2	-0,01	-0,162	-1,264
\hat{y}_1	1,716	1,892	2,551
\hat{y}_2	0,680	0,676	0,548
\hat{y}_3	1,846	1,874	1,834
\hat{y}_4	0,424	0,388	0,283
DPM	20,14	19,55	22,25

Fonte: Elaborado pelos autores.

Os dados apresentados na Tabela 2, demonstram que a função aglutinadora *Desirability* apresentou o melhor desempenho e a função aglutinadora CP o pior, repetindo-se o mesmo comportamento observado no teste do caso de Derringer e Suich.

As diferenças apresentadas entre os valores de DPM obtidos, assim como para cada variável resposta (y_n), com as funções aglutinadoras *Desirability* e *Desirability Modificada* são muito pequenas. Entretanto o ajuste de processo proposto em cada caso demonstra uma variação mais sensível, corroborando assim com a constatação da influência da função aglutinadora no desempenho do método de busca.

4.3. Vining

Os resultados obtidos a partir dos dados contidos no trabalho de Vining (1998), encontram-se sumarizados na Tabela 3.

Tabela 3 – Resultados do processo de otimização com diferentes funções aglutinadoras para o problema de Vining.

Variáveis	Função Aglutinadora		
	Desirability	Desirability Modificada	CP
x_1	-0,377	-0,394	0,018
x_2	1,633	1,633	1,633
x_3	-0,503	-0,472	-0,137
\hat{y}_1	94,47	94,48	95,50
\hat{y}_2	57,50	57,50	60,00
DPM	2,76	2,76	4,42

Fonte: Elaborado pelos autores.

Pode-se observar nos dados contidos na Tabela 3 que o desempenho das funções aglutinadoras *Desirability* e *Desirability Modificada* é praticamente o mesmo. Assim como nos demais testes realizados nesta pesquisa, a função aglutinadora CP foi a que apresentou o pior desempenho dentre as funções testadas.

Neste teste o desempenho equivalente apresentado entre as funções aglutinadoras pode ser explicado pelo fato do modelo que descreve o comportamento da variável resposta \hat{y}_2 não sofrer influência de todas as variáveis de controle (x_n), o que diminui significativamente o espaço de busca.

5. DISCUSSÃO

Os resultados obtidos para os casos estudados indicam que a função aglutinadora *Desirability Modificada* proposta por Ch'ng et al. (2005) possui um melhor desempenho, em termos de distância média percentual, dentre as funções aglutinadoras avaliadas neste trabalho. Uma outra vantagem da implementação da *Desirability Modificada*, quando comparada com *Desirability*, é que não há necessidade de se modificar a função objetivo em detrimento do valor obtido pelas variáveis-resposta quando estas são do tipo NTB.

O pior desempenho da função CP pode ser explicado pela incomensurabilidade embutida na função uma vez que seus termos não se encontram normalizados, o que ocasiona a priorização na otimização das variáveis resposta que possuem o maior valor em termos absolutos.

A comparação entre os valores obtidos para as variáveis resposta obtidas indicam que o melhor ajuste de processo pode ser dependente da função aglutinadora utilizada. Esse fato foi observado com maior intensidade para os modelos mais complexos, indicando que nesses casos a função aglutinadora *Desirability* Modificada pode ser capaz de explorar regiões de forma mais eficiente que as demais funções aglutinadoras empregadas neste estudo.

6. CONCLUSÕES

Neste artigo foi realizado um estudo comparativo entre o desempenho de funções aglutinadoras em processos de otimização com múltiplas respostas.

Os testes foram realizados para três casos diferentes e os resultados indicam que a função aglutinadora *Desirability* Modificada apresenta um desempenho superior as demais (*Desirability* e CP) em termos de distância média percentual.

Além do melhor desempenho da função *Desirability* Modificada na otimização, existe uma evidente correlação entre a função aglutinadora utilizada e as condições ótimas de processo, demonstrando a importância na utilização da melhor função aglutinadora na busca da melhor condição.

Os testes considerados neste artigo abordam casos que exibem respostas do tipo LTB e NTB contendo duas ou três variáveis de decisão. Mais testes devem ser realizados em trabalhos futuros a fim de se verificar se o melhor desempenho da função aglutinadora *Desirability* Modificada ocorre também para outros casos, como em problemas envolvendo respostas do tipo STB, modelos de terceira ordem ou de ordens superiores.

REFERÊNCIAS

BOYLAN, G. L.; GOETHALS, P. L.; CHO, B. R. Robust parameter design in resource-constrained environments: an investigation of trade-offs between costs and precision within variable processes. *Applied Mathematical Modelling*, v. 37, n. 4, p. 2394-2416, 2013.

CHENG, H; HUANG, W; CAI, J. Solving a Fully Fuzzy Linear Programming Problem through Compromise Programming. **Journal of Applied Mathematics**, v. 3, 2013.

CH'NG, C.; QUAH, S.; LOW, H. A new approach for multiple-response optimization. **Quality Engineering**, v. 17, p. 621-626, 2005.

DEHURI, S.; CHO, S. B. Multi-criterion Pareto based particle swarm optimized polynomial neural network for classification: A review and state-of-the-art, **Computer Science Review**, v. 3, n. 1, p. 19-40, 2009.

DERRINGER, G.; SUICH, R. Simultaneous optimization of several response variables, **Journal of Quality Technology**, v. 12, n. 4, p. 214-219, 1980.

DUCKSTEIN, L.; OPRICOVIC, S. Multiobjective optimization in river basin development. **Water Resources Research**. v. 16, n. 1, p. 14-20. 1980.

EHRGOTT, M.; IDE, J.; SCHÖBEL, A. Minmax robustness for multi-objective optimization problems. **European Journal of Operational Research**, v. 239, p. 17- 31, 2014.

ELSAYED, K.; LACOR, C. CFD modeling and multi-objective optimization of cyclone geometry using desirability function, artificial neural networks and genetic algorithms. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, p. 5680-5704, 2013.

HARIDY, S.; GOUDA, S. A.; WU, Z. An integrated framework of statistical process control and design of experiments for optimizing wire electrochemical turning process. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 53, p. 191-207, 2011.

KHURIA.; CONLONM. Simultaneous optimization of multiple responses represented by polynomial regression functions. **Technometrics**, v. 23, n. 4, p. 363-375, 1981.

KURIGER, G. W.; GRANT, F. H. A Lexicographic Nelder–Mead simulation optimization method to solve multi-criteria problems, **Computers & Industrial Engineering**, v. 60, n. 4, p. 555-565, 2011.

PIMENTA, C. D.; SILVA, M. B.; SALOMON, V. A. P.; PENTEADO, R. B.; GOMES, F. M. Aplicação das metodologias Desirability e Simplex para otimização das propriedades mecânicas em arames de aço temperados, **Production**, v. 25, n. 3, p. 598-610, 2015.

TSAI, C.; TONG, L.; WANG, C. Optimization of Multiple Responses Using Data Envelopment Analysis and Response Surface Methodology, **Tamkang Journal of Science and Engineering**, v. 13, n. 2, p. 197-203, 2010.

VINING G. A compromise approach to multiresponse optimization, **Journal of Quality Technology**, v. 30, n. 4, p. 309-313, 1998.

XU, K.; LIN, D. K. J.; TANG; L. C.; XIE, M. Multiresponse systems optimization using a goal attainment approach, **IIE Transactions**, v. 36, n. 5, p. 433-445, 2004.

WU, C.; HAMADA, M. **Experiments: Planning, analysis, and parameter design optimization**, ed. 1, New York: Wiley-Interscience.2000.

ZELENY, M. A concept of compromise solutions and the method of the displaced ideal. **Computers and Operations Research**, v. 1, p. 479-496, 1974.