

Obtenção de seqüências de experimentos fatoriais 2^{k-p} de menor custo aplicando métodos de programação matemática

Pedro Carlos Oprime (UFSCar, SP, Brasil) – pedro@dep.ufscar.br
• UFSCar – Rod. Washington Luís, Km 235, CEP: 13565-905, São Carlos, São Paulo
Vitoria Pureza (UFSCar SP, Brasil) – vpureza@dep.ufscar.br

Recebido em: 02/10/08 Aprovado em: 05/05/09

Resumo

A melhoria contínua faz parte da gestão de programas como o da Qualidade Total e Seis Sigma. Técnicas estatísticas têm tido um papel central nos projetos de melhoria contínua. Em especial, destaca-se o Planejamento de Experimentos, conhecido também como DOE (Design of Experiments). Um desafio da aplicação da técnica é obter uma seqüência que reduza os custos de experimentação e que também consiga boas propriedades estatísticas, evitando problemas como o de tendências lineares. As seqüências possíveis de experimentação podem ser avaliadas por critérios clássicos que relaciona os custos de execução (avaliado pelo número de mudança de variável MDV) que ocorre na transição entre duas combinações e, também, por critérios relacionados ao ótimo do experimento, que pode ser avaliado pela máxima contagem de tempo (MCT). Dado que a enumeração de todas as possíveis seqüências de experimentação demanda considerável esforço computacional, o problema foi modelado como uma modificação do método do caixeiro viajante e implementado com a linguagem GAMS/CPLEX. O método foi aplicado em um caso e os resultados de MDV e MCT foram calculados e comparados com as seqüências de experimentos aleatorizados e na ordem padrão. A seqüência obtida pelo método reduziu em 43% o tempo de experimentação, entretanto a seqüência proposta foi menos robusta aos efeitos de tendências lineares que da matriz aleatorizada.

Palavras-chave: Melhoria Contínua; DOE; Planejamento de Experimentos.

Abstract

Continuous improvement is part of management programs, such as Total Quality and Six Sigma. Statistical techniques have a central role in projects for improvement, particularly in Design of Experiments (DOE). DOE is a methodology that specifies the sequence of experiments to be performed, allowing a set of variables to control one or more variables of response. From these experiments, it is possible to develop a mathematical model that allows inferring the result from a combination of variables. Each sequence can be evaluated according to some measure of costs, such as the number of changes of variables in the transition between two experiments, or maximum counting time. Since the complete enumeration of all possible sequences with 16 or more experiments demands considerable computational effort, we suggest the application of mathematical programming approaches to provide a sequence with minimal number of changes of variables. The problem was modeled as a modified traveling salesman problem, and implemented in GAMS/CPLEX modeling language. The method was applied to a case and MDV and MCT results were calculated and compared to the randomized sequences of the experiments and default order. The sequence obtained by the method reduced experimentation time by 43%, however the proposal sequence was less robust to effects of trends than the randomized sequence.

Keywords: Continuous Improvement, DOE, Design of Experiments

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho aborda o problema de planejamento de experimentos industriais para a melhoria de produtos e processos em empresas manufactureiras. O assunto se alinha com as tendências atuais de analisar a eficiência da produção e de propor novas configurações de produtos que melhor atendam as necessidades do mercado, cuja teoria é estudada e praticada pela ótica da gestão da qualidade, denominada muitas vezes de TQM (Total Quality Management).

Alguns autores sugerem que a falta de resultados práticos da aplicação de algumas técnicas e o surgimento de novas abordagens (por exemplo, o programa Seis Sigma) têm colocado alguns programas em segundo plano nas organizações, por exemplo, os Círculos de Controle da Qualidade e o TQM (EHIGIE & MCANDREW, 2005; BERGQUIST et al., 2005; MCADAM & HENDERSON, 2004; LEONARD & MCADAM, 2003). Todavia, há conceitos relevantes consolidados nas abordagens do TQM que são fundamentais para a introdução de uma cultura voltada para a melhoria da qualidade e produtividade. Pode-se apontar a sistemática de solução de problemas denominada de PDCA, introduzida originalmente por Deming, que recentemente incorporou novos termos, como o DEMAIC (DEFINE, MEASURE, ANALYZE, IMPROVE, CONTROL) do Seis Sigma. Parte dessas transformações é explicada por Bergquist et al. (2005), Mcadam & Henderson (2004) e Ehigie & Mcandrew (2005).

Há algumas técnicas e ferramentas para a melhoria da qualidade e produtividade que têm recebido, nos últimos anos, grande destaque pelas empresas. Dentre essas, destaca-se o planejamento de experimentos (denominado também de DOE – Design of Experiments), introduzida por Fisher em 1926. As técnicas de DOE compõem o que se denomina de teorias mecanicistas do TQM. No entanto, essas teorias, especialmente relativas ao planejamento de experimentos, têm tido avanços teóricos significativos, com destaque para os métodos que auxiliam a elaboração de experimentos que melhoram as relações entre custo e propriedades estatísticas (Tack e Vandebroek, 2003 e Atkinson et al, 2007).

O problema de obter planejamento de experimentos ótimos (combinada com boas propriedades estatísticas com custo) foi inicialmente estudado por Draper e Stoneman (1968), Dickinson (1974) e Joiner e Campbell (1976). Ainda que de modo incompleto, esses autores abordam o ótimo de experimentos fatoriais e fatoriais fracionados pelo cálculo dos custos de experimentação, quantificado pelo número de mudanças de variáveis para uma dada seqüência ou ordem de experimentação, e a qualidade do experimento pela determinação da máxima contagem de tempo que mede os efeitos de tendências lineares sobre os fatores controlados, ou seja, os efeitos sobre as variáveis independentes.

Nesse trabalho é desenvolvido um método de seqüenciamento de matrizes ortogonais de experimentos fatoriais e fatoriais fracionados de dois níveis. Serão analisadas matrizes de experimentos fatoriais com um número de combinações variando entre 8 e 64, com diferentes graus de resolução, aplicando a elas os conceitos desenvolvidos por Draper e Stoneman (1968), Dickinson (1974) e Joiner e Campbell (1976).

Quanto aos custos de experimentação, soluções ótimas ou subótimas foram obtidas modelando o problema como um problema do caixeiro viajante (PCV) com variáveis adicionais, e utilizando o software de programação matemática GAMS/CPLEX. Do ponto de vista prático, pretende-se aplicar os conceitos e métodos desenvolvidos em um caso concreto e avaliar os ganhos e limitações ou generalizações possíveis da aplicação dos resultados obtidos da pesquisa.

Este trabalho está dividido nas seguintes partes, além da introdução e conclusão: 1º) uso do DOE nas atividades de melhoria contínua; 2º) planejamento de experimentos fatoriais robustos; 3º) critérios para a seqüência de experimentos fatoriais 2^{k-p} ; 4º) método clássico de seqüenciamento de experimentos; 5º) otimização do seqüenciamento de experimentos; e 6º) testes computacionais.

2. O USO DO DOE NAS ATIVIDADES DE MELHORIA CONTÍNUA

A melhoria contínua está fortemente enraizada na filosofia oriental da gestão da qualidade, denominada de Kaizen (IMAI, 1990). Nessa filosofia, a atividade de melhoria contínua permeia toda a organização, por meio de diferentes formas como, por exemplo, no incentivo à participação individual (no que se denomina de Kaizen focado no indivíduo), nas atividades de grupo e nas esferas administrativas (no chamado Kaizen focado na administração). Autores, como Bessant e Caffyn (1997) sustentam que a melhoria contínua tem um papel estratégico para as empresas, pois o engajamento de grupos na busca de melhorias na produção impulsiona a capacidade competitiva delas. Outra característica dessas atividades é o foco nos clientes (PRAJOGO & SOHAL, 2001; RAHMAN & BULLOCK, 2004).

Pode-se dizer que a gestão da qualidade tem inovado em suas abordagens; uma delas é o Seis Sigma, cujo programa na manufatura é apresentado como uma revolução que trata uma variedade de problemas e utiliza uma extensiva gama de rigorosas técnicas estatísticas focadas na melhoria contínua e mudança cultural (PFEIFER et al., 2004; PANDE, 2004; RAISINGHANI et al., 2005).

O DOE, importante ferramenta nos projetos de melhoria, é uma combinação de experimentos que permite relacionar um conjunto de variáveis de controle a uma ou mais variáveis de resposta. A partir desses experimentos é possível desenvolver um modelo matemático que permite inferir o resultado a partir da combinação de variáveis. O DOE é a técnica recomendada para melhorias mais radicais do processo e do produto, porém uma dificuldade no uso do DOE é o custo e o tempo de experimentação (BOX et al, 1978).

3. PLANEJAMENTO DE EXPERIMENTOS (DOE) FATORIAIS 2^{k-p} ROBUSTOS

A metodologia para aplicação do DOE é similar a dos métodos de engenharia para resolução de problemas. Ela consiste nos seguintes passos: (i) definição e reconhecimento da importância do problema; (ii) escolha dos fatores e níveis; (iii) seleção de uma variável resposta; (iv) escolha do planejamento experimental; (v) execução de um experimento; (vi) análise dos resultados; (vii) conclusões e recomendações (MONTGOMERY, 1991).

Dentre as técnicas de análise de um experimento, o teste de significância é o mais utilizado, juntamente com as análises gráficas. A grande vantagem do uso de experimentos fatoriais é a possibilidade de analisar um grande número de variável conjuntamente; isso possibilita a identificação das interações entre tais variáveis (BOX, HUNTER e HUNTER, 1978).

Um problema do experimentador, do ponto de vista estatístico, na aplicação desses experimentos é garantir a sua robustez, ou seja, evitar a influência de tendências lineares. Isso deve-se à ocorrência de fatores não controlados, que invalida a suposição de independência entre os diferentes valores da variável resposta. Já a independência entre as variáveis de controle é garantida pela ortogonalidade das matrizes de experimentos.

Um critério para avaliar a qualidade do projeto (design) do experimento, frente ao problema de tendência linear, é calcular o coeficiente de correlação entre cada fator e a ordem temporal de execução dos tratamentos. A tabela 1 mostra que há forte correlação (0,868) entre a ordem de execução do experimento com o Fator D, o que não ocorre quando é feita a aleatorização. Em termos de validação do experimento, o Fator D estaria mais sujeito aos efeitos de tendências lineares. Autores como Gibbons e Chakraborti (2003) analisam a questão da aleatorização em planejamento de experimentos.

Tabela 1 – comparação dos efeitos de tendência linear para um experimento aleatorizado e outro executado na ordem padrão.

EXPERIMENTO	FATORES			
$2^4 = 16$	A	B	C	D
ordem aleatória	-0,217	0,136	0,217	0,271
ordem padrão	0,108	0,217	0,434	0,868

4. CRITÉRIOS PARA A SEQÜÊNCIA DE EXPERIMENTOS FATORIAIS 2^{k-p}

Um desafio da experimentação é a presença de efeitos de fatores desconhecidos que afetam os resultados do experimento. A aleatorização da ordem de execução dos experimentos é o procedimento recomendado para tratar esse problema. Entretanto, a questão é se é possível definir uma melhor seqüência de experimentação.

O número de possibilidades de seqüências de experimentos fatoriais de dois níveis é muito grande. Para um experimento de 8 combinações de tratamentos há 40.320 possibilidades de ordem de execução (esse número é obtido por $8!$). Para 16 combinações de tratamento é $2,09 \times 10^{13}$ possibilidades de seqüências de experimento. Obter seqüências de experimentação baseada na enumeração é praticamente impossível. Métodos de enumeração de experimentos fatoriais podem ser obtidos em Tack e Vandebroek (2003).

Com base em Tack e Vandebroek (2004), o custo total de um plano de experimentação é composto por dois elementos: i) o custo da execução de cada combinação de tratamento, que envolve os custos execução do experimento e os custos de medida dos resultados; ii) o custo de transição, que é o custo de mudar o nível de um dado fator de um x_i para o nível x_j , ou seja, o custo de mudança de níveis das variáveis ou fatores controlados em um experimento, que esta associado ao custo de seqüenciamento.

O custo de transição depende de cada variável ou fator, entretanto pode-se seguramente afirmar que quanto maior o número de transição de variáveis maior o custo do experimento. A literatura fornece critérios para a seleção da seqüência de experimentação que leva em consideração os custos de experimentação. Daniel e Wilcoxon (1966), Draper e Stoneman, (1968), Dickinson (1974) e Joiner e Campbell (1976) abordam o problema de custos com relação à ordem de seqüência dos experimentos utilizando, como critério, o número de mudanças de variável.

Draper e Stoneman (1968) foram um dos primeiros autores a tratar desse problema, e sugeriram dois critérios no planejamento dos experimentos que são influenciados pela ordem de experimentação: i) o número de mudanças de variáveis, MDV, para a avaliação do custo de transição de uma variável de um nível para outro; ii) a máxima contagem de tempo, MCT, cujo critério tem como pressuposto a qualidade de avaliar os efeitos de tendências lineares, cuja presença pode comprometer as conclusões do experimento.

O critério MCT está relacionado ao conceito de otimalidade do experimento. Neste contexto, o termo otimalidade diz respeito a um conjunto de critérios relacionados à qualidade dos experimentos; dentre

estes, inclui-se o problema das tendências lineares que viola a independência e a estabilidade dos dados, comprometendo as regras de validação dos mesmos. No exemplo citado, se o experimento for executado em oito horas, sendo a variável “método de trabalho” realizada com um dado método pela manhã e, à tarde, com outro, há o risco de alguma mudança no processo entre os dois períodos, provocada por alguma variável não controlada.

Para um modelo linear, $y_i - f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon$ pode ser escrita como a equação 1.

$$(1) \quad y_i = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \beta_2 x_1 x_2 + \dots + \beta_{n-1,n} x_{n-1} x_n + \beta_2 x_1^2 + \dots + \beta_n x_n^2 + \varepsilon$$

A variável resposta y_i é função das variáveis independentes x_i , com parâmetros β_i , e com erro aleatório ε , com distribuição normal, independente e identicamente distribuída, com $E(\varepsilon) = 0$, $V(\varepsilon) = \sigma^2$. Cada parâmetro β_i do modelo linear é estimado pelo método dos mínimos quadrados. Esses parâmetros são estimados a partir do design do experimento, do tipo fatorial 2^{k-p} , com N níveis.

Um dos critérios de otimalidade do design é obtido quando se minimiza a variância dos parâmetros do modelo $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, matematicamente determinado por $[F^T F]$, que deriva da expressão vetorial do modelo linear, representado por $E(y) = F\beta$, sendo y o vetor com $N + 1$ resposta, β é vetor de P parâmetros desconhecidos, e F é a matriz de $N \times p$ experimentos (Atkinson et al, 2007).

A variância dos parâmetros estimados é fornecida pela equação 2.

$$(2) \quad \text{var}(\hat{\beta}) = \sigma (F^T F)^{-1} F^T y$$

Sendo que σ^2 é a variância residual do erro ε e estimada pela diferença entre o valor real, y_i , e o valor estimado pelo modelo \hat{y}_i , conforme equação 3.

$$(3) \quad y_i - \hat{y}_i = y_i - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Em um experimento fatorial, as variáveis independentes estão entre $-1 \leq x \leq 1$, e a região experimental (χ) dessas variáveis está entre $[-1; +1]$. A variância padronizada, dada pela equação seguinte, na região de experimentação, é outro critério para a escolha do design do experimento.

A variância padronizada é dada pela equação 4, conforme Atkinson et al. (2007).

$$(4) \quad d(x, \varepsilon) = \frac{N \text{ var } \{\hat{y}(x)\}}{\sigma^2}$$

Atkinson et al (2007) mostra que para diferentes designs de experimentos podem ser obtidos diferentes valores $[F^T F]$ e de $d(x, \varepsilon)$ na região de experimentação, χ . Por exemplo, para o critério de variância padronizada ($d(x, \varepsilon)$), os designs com pontos amostrais -1 e +1, para o modelo linear simples, e -1, 0 e +1, para modelos quadráticos, têm a menor variância. Outro aspecto considerado na análise desses autores, é que experimentos ortogonais, obtidos pela simetria dos pontos experimentais, ao contrário de experimentos não simétricos ou não balanceados, evita a correlação entre os parâmetros β estimados e, também, uma menor $d(x, \varepsilon)$ pela região de experimentação.

Com base exposto, podem ser considerados três critérios de otimalidade na seleção do design do experimento:

- D-otimalidade: maximiza $[F^T F]$, que é a minimização da variância generalizada dos parâmetros estimados do modelo;
- G-otimalidade: minimiza a máxima variância padronizada, $d(x, \epsilon)$, sobre a região experimental;
- V-otimalidade: é a média minimizada obtida dos dois critérios anteriores, $[F^T F]$ e $d(x, \epsilon)$.

Esses critérios permitiram a construção de algoritmos para a obtenção de experimentos ótimos, dentro de um espaço de experimental, de tal modo a conduzir o experimentador a um plano de experimento ideal do ponto de vista das propriedades estatística.

Entretanto, há ainda o problema dos efeitos de tendência linear, cujo efeito é minimizado pela aleatorização da seqüência (Box, Hunter, Hunter, 1978; Atkinson et al, 2007). A ordem de seqüência de execução dos experimentos pode elevar os custos de experimentação pela maior quantidade de mudanças de variáveis, cuja quantificação foi proposta inicialmente por Draper e Stoneman (1968). Tack e Vandebroek (2004) tratam dessa questão, propondo uma seqüência de experimento que combina a relação custo e qualidade do experimento.

Matematicamente, a expansão do modelo de regressão linear simples, com uma única variável independente, incorporando os efeitos de tendência linear, sendo que $g(t)$ é a função com parâmetro α relacionada ao tempo, pode ser representada conforme equação 5.

$$(5) \quad y_i = \beta_0 + \beta x_i + g(t)\alpha + \epsilon_i$$

Há procedimentos matemáticos genéricos, indicado por Tack e Vandebroek (2004), que compatibiliza os efeitos de tendência lineares com as propriedades de otimalidade do design. Os efeitos tendências lineares comprometem a determinação dos efeitos principais, dado que os vetores $FG \neq 0$, o que indica que unidade no tempo não é ortogonal aos tratamentos de interesse, onde F vem da expressão matemática que determina a D-otimalidade $[F^T F]$, e G é o vetor associado ao tempo. Assim, diz que um experimento é livre dos efeitos de tendências lineares quando os vetores dos tratamentos de interesse são ortogonais ao vetor tempo, isso ocorre quando $FG = 0$.

O método proposto por Draper e Stoneman (1968) trata a questão medindo dois aspectos dos experimentos: a máxima contagem de tempo (MCT) e o número de mudanças de variáveis (MDV). Há, para alguns designs de experimentos, conflito entre os dois critérios. Do ponto de vista econômico, o número de mudanças de variáveis tem um peso significativo para os experimentadores.

Ao aplicar o método clássico de Draper e Stoneman (1968) necessariamente são feitas as seguintes suposições: i) o custo de transição de um nível para outro é o mesmo para todas as variáveis; ii) o intervalo de tempo entre os experimentos é igualmente espaçado.

5. O MÉTODO CLÁSSICO DE DRAPER E STONEMAN

Para ilustrar a aplicação do método clássico de seqüenciamento com base nos cálculos de MCT e MDV, na Tabela 2 é mostrado um experimento fatorial 2^3 completo. O experimento contempla três variáveis (ou fatores) na região experimental (X) das variáveis independentes está entre $[-1;+1]$. A ordem de execução é identificada na primeira coluna. Mudanças em uma variável são verificadas quando o símbolo “+” a ela associado é substituído pelo símbolo “-”, e vice-versa. Note que a mudança do experimento 1 para o experimento 2, resulta na mudança de uma variável (fator 1). Do experimento 2 para o experimento 8, há a mudança de duas variáveis (fatores 2 e 3). Desta forma, o número de mudanças de variáveis nesta seqüência é 1, 2, 1, 1, 2, 1, 2, totalizando 10 mudanças.

A contagem máxima de tempo, por sua vez, é obtida multiplicando cada coluna dos fatores pela ordem de execução dos experimentos. Para o exemplo em questão, obtêm-se os resultados apresentados na figura 2 para os fatores 1, 2 e 3, conforme abaixo.

- Fator 1: $-1+2+3-4-5-6+7+8 = 4$;
- Fator 2: $-1-2+3+4+5-6-7+8 = 4$;
- Fator 3: $-1-2+3+4-5+6+7-8 = 4$.

Tabela 2 – Seqüência de um plano de experimentos com 3 variáveis e 8 experimentos.

Ordem de experimentação	Experimento	1	2	3
1	1	-	-	-
2	2	+	-	-
3	8	+	+	+
4	7	-	+	+
5	3	-	+	-
6	5	-	-	+
7	6	+	-	+
8	4	+	+	-

Nesse exemplo, a máxima contagem de tempo é 4 e o número de mudanças de variáveis é 10. Como pode ser observado na tabela 1, a MCT é a medida da correlação entre o tempo e os fatores da matriz de experimentação. Para que os experimentos industriais sejam realizados com o menor custo e com menor efeito de tendências lineares, é interessante, portanto, a utilização de práticas que viabilizem de forma rápida, a obtenção da melhor solução e, se possível, uma solução melhor do que a obtida com a simples aleatorização.

Assumindo que os custos de mudança de variáveis sejam iguais, e que o interesse seja somente dos efeitos principais, é sugerido, neste trabalho, a utilização de métodos matemáticos para identificação de seqüências que minimizem o número de troca de variáveis. A máxima contagem de tempo (presença de tendências lineares) para experimentos com 2^{k-p} combinações é analisada após a obtenção das seqüências com menor número de mudanças de variáveis.

6. OTIMIZAÇÃO DO SEQÜENCIAMENTO DE EXPERIMENTOS

A obtenção da seqüência ótima de experimentos sob o critério MDV (número de mudanças de variáveis) pode ser feita com a aplicação de técnicas de pesquisa operacional, em particular, por meio de programação matemática. Um modelo de programação matemática é expresso de forma analítica e sua resolução visa a minimização ou maximização de uma função relacionada ao objetivo do problema (função objetivo). A função objetivo é definida por variáveis que expressam completamente as decisões a serem tomadas (variáveis de decisão) e está sujeita a um conjunto de igualdades e desigualdades (restrições) que representam as relações entre as variáveis e outros aspectos do sistema.

O problema de seqüenciamento de experimentos (aqui denotado por PSE) foi inicialmente modelado como um problema do caixeiro viajante (PCV). Dado um grafo completo $G(V,A)$ com n vértices, o PCV consiste em obter uma rota de menor custo que visite cada vértice v_i ($v_i \subseteq V$, $|V|=n$) exatamente uma vez, retornando ao vértice inicial v_1 . O custo da rota é dado pela somatória do comprimento das arestas a_k ($a_k \subseteq A$) entre pares de vértices, percorridas na rota formada. Assim, uma solução para o PCV corresponde a uma permutação de vértices $v_1 v_2 \dots v_n$ de menor custo, onde v_i representa o i -ésimo vértice visitado. O PCV é classificado pela teoria de complexidade como NP-completo, ou seja, não se conhecem algoritmos de tempo polinomial para resolvê-lo (GAREY E JOHNSON, 1979).

Considere como variáveis de decisão, x_{ij} ($i, j \subseteq V$) as quais assumem valor 1 se a aresta entre os vértices i e j pertence à solução, e valor 0, caso contrário. Considere também que o comprimento das arestas entre os vértices i e j seja dado pelo parâmetro de entrada c_{ij} . Desta forma, o modelo de programação matemática do PCV pode ser descrito pelas equações 6, 7, 8, 9 e 10.

$$(6) \text{ Minimizar } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

sujeita a:

$$(7) \quad \sum_j x_{ij} = 1 \text{ para todo } i = 1..n$$

$$(8) \quad \sum_i x_{ij} = 1 \text{ para todo } j = 1..n$$

$$(9) \quad \sum_i \subseteq S \sum_j \subseteq S x_{ij} \leq |S| - 1 \text{ para todo } S \text{ não vazio } \subseteq \{2, \dots, n\}$$

$$(10) \quad x_{ij} = \{0,1\} \quad i = 1..n, j = 1..n$$

Note que a função objetivo (6) corresponde ao comprimento total da rota a ser minimizado. O conjunto de restrições (7) impõe que um único vértice j seja visitado diretamente após cada vértice i . O conjunto de restrições (8), por sua vez, impõe que a visita de cada vértice j seja precedida diretamente por um único vértice i . O conjunto de restrições (9) impede a criação de subrotas, ou seja, de seqüências desconexas ou que impliquem em mais de uma visita a algum vértice. Finalmente, o conjunto de restrições (10) limita as variáveis de decisão a valores binários. É importante ressaltar que a natureza combinatória do problema (as variáveis devem assumir valores inteiros) torna a resolução do modelo muitas vezes impraticável para exemplos de grande porte.

Existem várias técnicas para resolução de problemas de otimização combinatória, dentre as quais, a mais conhecida é o método branch&bound. Este método encontra uma solução com melhor valor de função objetivo (solução ótima) de um problema, particionando o problema original em subproblemas e enumerando de forma implícita suas soluções (WINSTON, 1992). Um exemplo de solução para o PCV é dado na figura 1.

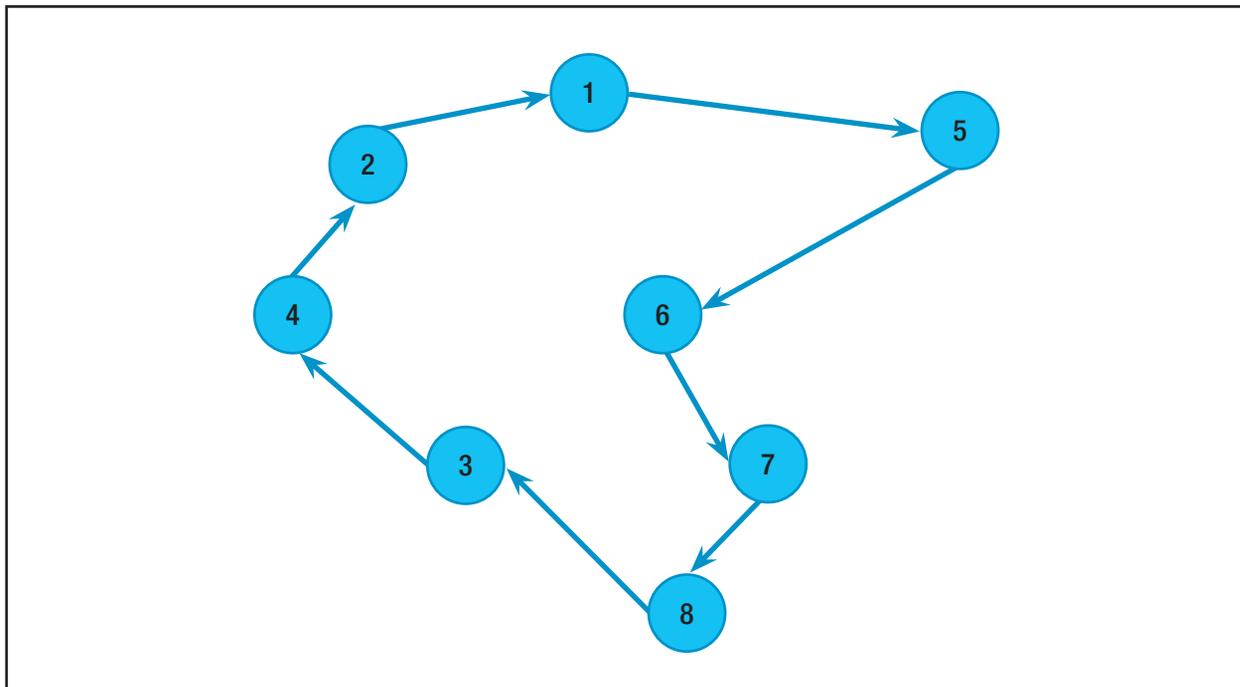


Figura 1 – Exemplo de solução para um PCV com 8 vértices. A solução representa a seqüência de visitas (permutação) 1-5-6-7-8-3-4-2.

Exceto por poucos detalhes, o PSE para minimização do número de mudanças de variáveis pode ser modelado como um PCV. Neste caso, cada vértice do grafo corresponde a um experimento i de um conjunto de n experimentos. As variáveis de decisão x_{ij} assumem valor 1 se o experimento i precede o experimento j , e valor 0, caso contrário. Os parâmetros de custo c_{ij} correspondem ao número de trocas de variáveis ao se passar do experimento i para o experimento j .

Desta forma, a função objetivo (6) indica o número total de trocas de variáveis da permutação, as restrições (8) e (9) garantem que um único experimento precede e sucede cada experimento, e as restrições (10) impedem seqüências desconexas ou que impliquem na repetição de experimentos.

A única adaptação necessária para o uso do modelo diz respeito ao fato de que a solução do PCV consiste de um ciclo enquanto o PSE é um caminho em um grafo. Tal adaptação é facilmente implementada ao se incluir no modelo, um experimento (vértice) fantasma denotado por 0. O experimento 0 é utilizado para identificar os experimentos inicial e final da seqüência. Especificamente, o experimento que sucede 0 corresponde ao primeiro experimento, e o experimento que precede 0 corresponde ao último experimento. Como o experimento 0 não tem significado físico, os custos de mudanças de variáveis a ele associados são nulos. Ou seja:

$$c_{0j} = 0 \text{ para todo } j=1..n$$

$$c_{i0} = 0 \text{ para todo } i=1..n$$

A Figura 2 ilustra um exemplo de solução para o PSE.

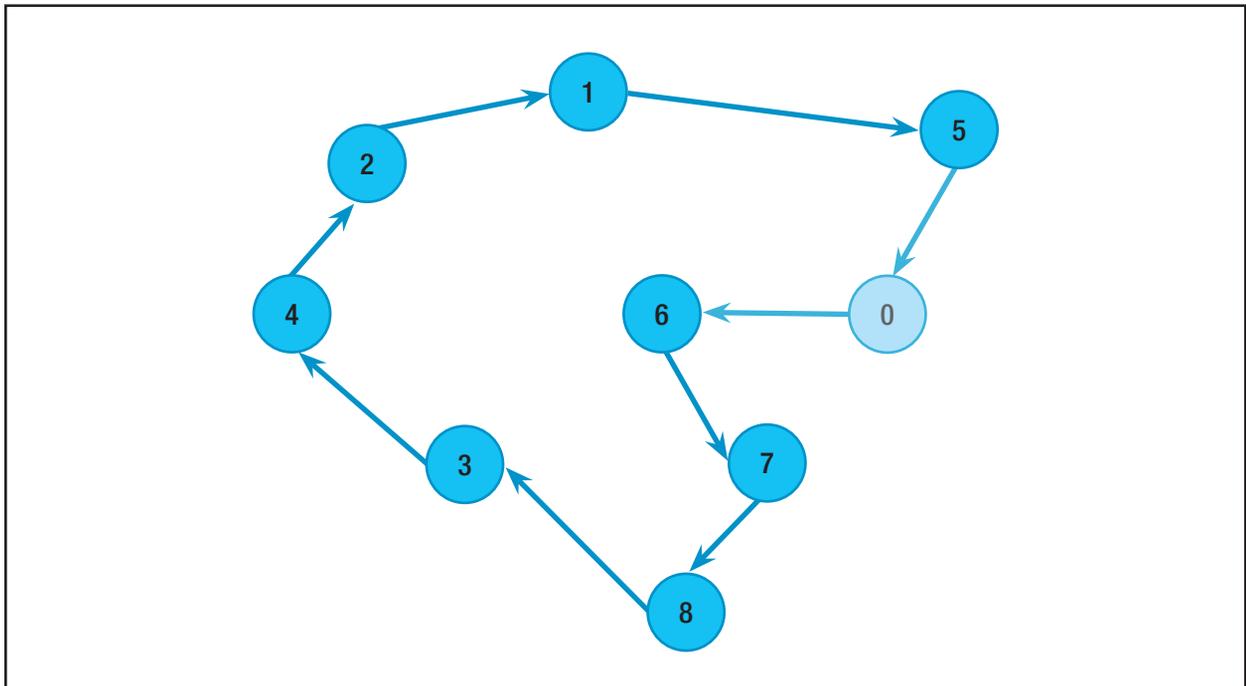


Figura 2 – Exemplo de solução para um PSE com 9 experimentos (onde 0 é o experimento fantasma). A solução representa a seqüência de experimentos (permutação) 6-7-8-3-4-2-1-5.

7. TESTES COMPUTACIONAIS

O modelo do PCV adaptado e descrito na seção anterior foi implementado na linguagem de modelagem GAMS 2.0 com o solver CPLEX 7.0 (BROOKE et al., 1992). Os testes foram executados em um micro-computador Pentium IV 3.0 GHz, 2.0 Gb RAM, com os parâmetros padrão CPLEX e tolerância zero para o gap de otimalidade. Cabe ressaltar que a linguagem de modelagem GAMS utiliza o método branch&bound para resolução de problemas combinatórios, como o aqui tratado.

Tabela 3 – Seqüência de experimentos com menor MDV.

Experimento	Resolução	Seqüência de teste	MDV	Tempo (s)
$2^3 = 8$	FULL	3 7 8 6 5 1 2 4	7	< 0,001
$2^{4-1} = 8$	IV	7 1 6 4 3 5 2 8	14	< 0,001
$2^{5-2} = 8$	III	8 4 2 6 5 1 3 7	15	< 0,001
$2^4 = 16$	FULL	12 11 15 13 9 10 14 16 8 4 2 6 5 1 3 7	15	0,016
$2^{5-1} = 16$	V	15 13 5 2 1 11 7 8 6 14 9 3 12 4 10 16	30	0,015
$2^{6-2} = 16$	IV	12 14 13 5 6 4 3 11 10 9 15 16 8 2 1 7	31	0,015
$2^5 = 32$	FULL	24 22 30 32 28 27 11 12 16 15 13 09 10 14 06 02 01 05 21 17 18 20 10 03 04 08 07 23 31 29 25 26	31	0,047
$2^{6-1} = 32$	VI	6 30 32 31 7 1 17 23 29 13 10 2 22 21 05 14 09 03 20 04 28 18 24 08 12 15 16 11 27 26 25 19	62	0,031

A Tabela 3 apresenta os resultados das seqüências de experimentação obtidos para experimentos fatoriais 2^{k-p} de diferentes graus de resolução. A primeira e a segunda coluna indicam, respectivamente, o tipo e o grau de resolução do experimento, enquanto a terceira e quarta coluna apresentam, respectivamente, a seqüência que minimiza MDV e os tempos computacionais requeridos para obtenção de cada solução com o GAMS/CPLEX. Note que em todos os exemplos, seqüências ótimas foram obtidas em tempos computacionais bastante reduzidos.

Para a ordem de seqüência de experimentação da tabela 3, foi calculado o índice MCT, e comparado com os índices de um design de experimento aleatorizado. A tabela 4 tem essas comparações. Infelizmente, algumas das seqüências ótimas obtidas para o número de mudanças de variáveis foram ruins para a MCT, indicando fraca robustez desses planos quanto aos efeitos de tendências lineares. Entretanto, para os experimentos 2^{6-2} e 2^{6-1} , a seqüência proposta compatibiliza o número de mudanças de variável com a máxima contagem de tempo.

Tabela 4 – Comparação da ordem de experimentação proposta com a aleatória.

Resolução	Ordem proposta		Ordem aleatória	
	MDV	MCT	MDV	MCT
$2^3 = 8$	7	8	10	4
$2^{4-1} = 8$	14	16	18	6
$2^{5-2} = 8$	15	16	19	14
$2^4 = 16$	15	64	31	20
$2^{5-1} = 16$	30	64	42	20
$2^{6-2} = 16$	31	24	41	50
$2^5 = 32$	31	227	85	142
$2^{6-1} = 32$	62	128	108	76

7.1. Aplicação dos resultados

Os resultados da ordem de experimentação obtida pelos métodos de pesquisa operacional da tabela 2 foram considerados no planejamento de um experimento industrial, já apresentado nas seções anteriores. Foi realizado um experimento 2^{6-1} , com 32 testes, de resolução VI, cuja matriz aleatorizada foi gerada pelo software Statistica 8.0. O número de mudanças de variáveis (MDV) para o caso foi 110 e a máxima contagem de tempo (MCT) foi de 74 (esses resultados estão na tabela 4). Aplicando a seqüência sugerida pela resolução do modelo matemático (tabela 3), seriam realizadas 62 mudanças de variáveis. Isso representa uma redução em termos de MDV de 43,6%. Entretanto, quanto ao critério MCT o plano de experimentação é pior, 128 contra 74.

Tabela 5 – Comparação dos coeficientes de correlação entre os fatores e o tempo.

Experimento	Fatores					
	A	B	C	D	E	F
Ordem aleatória	-0,250	0,014	-0,115	0,047	-0,074	0,122
Ordem proporta	0,034	0,325	-0,433	0,169	0,020	0,047
Ordem padrão	0,054	0,108	0,217	0,433	0,866	0,000

A tabela 5 compara os coeficientes de correlação entre os fatores das matrizes geradas aleatoriamente, pelo método proposto (tabela 3) e pela ordem padrão. As correlações estatisticamente significativas estão sublinhadas. Não há correlação entre os fatores e o tempo para a ordem aleatória. Para a ordem proposta, há correlação estatisticamente significativa do Fator C com o tempo, ou seja, o Fator designado à coluna C da matriz é mais vulnerável aos efeitos de tendências lineares. A ordem padrão, ou seja a não aleatorizada, é a menos robusta.

Para a execução dos 32 testes no experimento do exemplo requereu aproximadamente 14 horas (26 minutos por teste), segundo o design aleatorizado. Ainda que o tempo em cada mudança de variável tenha sido relativamente baixo (de 3 a 4 minutos), esta tarefa totalizou 5 horas e 30 minutos. Utilizando a seqüência obtida com o modelo matemático, o tempo de mudança de variáveis passaria a 3 horas e 30 minutos, ou seja, um ganho de 2 horas na realização do experimento. Note que 2 horas de parada numa linha de produção é significativo. A proposta é posicionar a variável ou fator mais robusto na posição da matriz mais sujeita aos efeitos de tendências lineares.

Entretanto, apesar da redução de 43% nos custos de um experimento ser muito atrativo, caso o experimentador opte pelo design proposto pelo método, há que se ter cuidado com a variável na posição C.

8. CONCLUSÕES

A proposta deste trabalho foi de determinar a seqüência de experimentação de menor custo por meio da aplicação de métodos de programação matemática com vistas à minimização do número de mudanças de variáveis. A literatura apresenta vários algoritmos para determinar a ordem de experimentação combinando custos com boas propriedades estatísticas. Essas propriedades estatísticas estão relacionadas em parte pelo espaço de experimentação, pelo balanceamento (simetria) das matrizes de experimentos e pela variância padronizada da estimativa da variável resposta.

Entretanto, há ainda o problema dos efeitos de tendências lineares e dos custos de experimentação. Usando a abordagem do problema proposta por Draper e Stoleman (1968), de difícil solução por análise combinatória, e aplicando os métodos matemáticos, foi possível encontrar soluções ótimas ou quase ótimas para a minimização do número de mudanças de variáveis. Por outro lado, para algumas seqüências propostas, os resultados não foram bons para os efeitos de tendências lineares, cuja avaliação foi feita por meio do coeficiente de correlação e pela máxima contagem de tempo.

Foram feitas comparações entre a seqüência baseada na aleatorização com as proposta pelo método matemático que indicou boas soluções de seqüenciamento da ordem de experimentação para algumas matrizes de experimentos. Para outras, é possível compatibilizar os custos, baseado no número de mudanças de variáveis, com a robustez do experimento por meio da alocação apropriada das variáveis na matriz de experimento. Isso é possível pela experiência dos participantes da experimentação.

No estudo de caso apresentado, verificou-se que a seqüência de experimentos proposta com a aplicação do modelo matemático, reduziu em mais de 43% o número de mudanças de variáveis (um ganho de 2 horas no tempo de execução do experimento) além de obter um melhora em relação aos efeitos de tendências lineares.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ATKINSON, A. C.; DONOV, A. N.; R. D. TOBIAS. **Optimum experiments design, with SAS**. Oxford Press, New York, p. 527, 2007
- BERGQUIST, B.; FREDKSSON, M.; SVENSON, M. TQM: terrific quality marvel or tragic quality malpractice. **The TQM Magazine**, v. 17, n. 4, p. 309-321, 2005.
- BESSANT, J.; CAFFYN, S. High involvement innovation. **International Journal of Technology and Management**. v. 14, n. 1, 1997.
- BOX, G. E. P.; HUNTER, W. G.; HUNTER, J. S. **Statistics for experimenters**. New York: Wiley, p. 510-539, 1978.
- BROOKE, A.; KENDRICK, D.; MEERAUS, A. **GAMS: a user's guide** (release 2.25). San Francisco: The Scientific Press, 1992.
- DANIEL, C; WILCOXON, F. Factorial $2p-q$ plans robust against linear and quadratic trends. **Technometrics**, v. 8, 259-278, 1966.
- DICKINSON, A. W. Some run orders requirements a minimum number of factor level changes for the 24 and 25 main effect plans. **Technometrics**, v. 16, p. 31-37, 1974.
- DRAPER, N. R.; STONEMAN, D.M. Factor changes an linear trends in eight-run two level factorial designs. **Technometrics**, v. 10, p. 301-311, 1968.
- EHIGIE, B. O.; MCANDREW, E. B. Innovation, diffusion and adoption of total quality management. **Management Decision**, v. 43, n. 6, p. 925-940, 2005.
- GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. **Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness**, W. H. Freeman and Co., New York, 1979.
- GIBBONS, J. D.; CHAKRABORTI, S. **Nonparametric Statistical Inference**, Marcel Dekker, Fourth Edition, New York, 2003.
- IMAI, M. **Kaizen: the key to Japanese competitive success**. New York: Random House, 1986.
- JOINER, B. L.; CAMPBELL, C. Designing experiments when run order is important. **Technometrics**, Vol. 18, N. 3, 249-259, 1976.
- LEONARD, D.; MCADAM, R. An evaluative framework for TQM dynamics in organizations. **International Journal of Operations & Production Management**, v. 23, n. 6, p. 652-677, 2003.
- MCADAM, R.; HENDERSON, J. Influencing the future of TQM: internal and external driving factors, **International Journal of Quality & Reliability Management**, v. 21, n. 1, p. 51-71, 2004.
- MONTGOMERY, D. C. **Design of analysis of experiments**. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- PANDE, P. S.; NEUMAN, R. P.; CAVANAGH, R.R. **Estratégia Seis Sigma: como a GE, a Motorola e outras grandes empresas estão aguçando seu desempenho**. Rio de Janeiro: Qualitymark, 472 p., 2002.
- PFEIFER, T.; REISSIGER, W.; CANALES, C. Integrating six sigma with quality management systems. **The TQM Magazine**, v. 16, n. 4, p. 241-249, 2004.
- PRAJOGO, D. I.; SOHAL, A. S. TQM and innovation: a literature review and research framework. **Technovation**. n. 21, p. 5329-558, 2001.
- RAISINGHANI M.; ETTE, H.; PIERCE, R.; CANNON, G.; DARIPLAY, P. Six Sigma: concepts, tools, and applications. **Industrial Management & Data Systems**, v. 105, n. 4, p. 491-505, 2005.
- TACK, L.; VANDEBROEK, M. Budget constrained run orders in optimum design. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 124, p. 231-249, 2003.
- TACK, L.; VANDEBROEK, M. Trend-resistant and cost-efficient cross-over designs for mixed models. **Computation Statistics & Data Analysis**, v. 46, p. 721-746, 2004.
- WINSTON, W. L **Operations Research – Applications and Algorithms**. 2nd. edition, Pws-Kent Publishing Company, 1992.